SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

PARAPRODOTTO E APPLICAZIONI

17 GENNAIO-24 GENNAIO 1985.

In questo seminario esporremo alcune tecniche che sono state sviluppate per trattare equazioni differenziali lineari con coefficienti non regolari ed equazioni non lineari; si tratta in sostanza di costruire operatori che svolgano un ruolo analogo a quello degli operatori pseudodifferenziali nel caso lineare C^{∞}. Un primo tentativo in questo senso è costituito dagli operatori introdotti da R.R. Coifman e Y. Meyer in [C/M] per lo studio di certi integrali singolari (integrali di Calderón); per tali operatori non è però stato possibile sviluppare un calcolo simbolico analogo al calcolo pseudodifferenziale usuale. Questo punto di vista è stato ripreso da J.M. Bony [B1] in connessione a problemi non lineari adattando l'idea di paraprodotto introdotto da A. Calderón. Bony definisce una classe di operatori (gli operatori paradifferenziali) per i quali sviluppa un calcolo simbolico e che utilizza per "paralinearizzare" equazioni non lineari.

Nella prima parte di questo seminario descriveremo il calcolo di Bony; successivamente mostreremo come queste tecniche permettano di provare una caratterizzazione degli operatori integrali singolari L^2-continui. Notiamo che questo risultato (G. David e J.L. Journé) permette di riottenere la L^2-continuità degli integrali di Calderón.

1. PARAPRODOTTO E OPERATORI PARADIFFERENZIALI

1.1. Daremo ora una prima definizione di paraprodotto. Premettiamo alcune definizioni e alcuni richiami.

Se $\mu \in]0,1[$, denoteremo con $C^{\mu}(R^n)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^{\infty}(R^n)$ tali che

$$[u]_\mu = \sup_{\substack{(x,y) \in R^n x R^n \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty$$

Muniremo $C^\mu(R^n)$ della norma

$$\|u\|_{C^\mu} = \|u\|_{L^\infty} + [u]_\mu .$$

Se poi $m \in N$ e $\mu \in]0,1[$, denoteremo con $C^{m+\mu}(R^n)$ lo spazio delle funzioni u tali che $D^\alpha u \in C^\mu(R^n)$ $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq m$ munito della norma

$$\|u\|_{C^{m+\mu}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|=m} [D^\alpha u]_\mu .$$

Inoltre $C_o^{m+\mu}(R^n)$ denoterà il sottospazio delle funzioni a supporto compatto.

Osserviamo esplicitamente che non abbiamo definito lo spazio $C^s(R^n)$ per $s \in Z$, $s \geq 0$; la definizione richiede infatti alcune modificazioni analoghe a quelle che si utilizzano per gli spazi di Besov.

Sia ora $\phi \in C_o^\infty(R^n)$ una funzione radiale non negativa tale che $\phi(\xi) \equiv 1$ per $|\xi| \leq 1/2$ e $\phi(\xi) \equiv 0$ per $|\xi| \geq 1$. Denotiamo con S_k l'operatore da S' a S' definito da

$$F(S_k u)(\xi) = \phi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)(Fu)(\xi),$$

dove F denota la trasformata di Fourier.

Indicando con Δ_k l'operatore $S_{k+1} - S_k$, risulta

$$u = S_o u + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k u$$

<u>Proposizione 1.1.1.</u> *Una funzione* $u \in L^\infty(R^n)$ *appartiene a*

$C^\mu(R^n)$ ($\mu > 0$ *non intero*) *se e solo se esiste* $C > 0$ *tale che* $\|\Delta_k u\|_{L^\infty(R^n)} \leqq C\, 2^{-\mu k}$, $k \in N$. *Se inoltre* $0 < \mu < m \in N$ *e se le funzioni* $g_k \in C^\infty$ *sono tali che* $\|D^\alpha_{g_k}\|_{L^\infty} \leqq C 2^{k(|\alpha|-\mu)}$ *se* $|\alpha| \leqq m$, *allora* $\sum_k g_k \in C^\mu$.

Possiamo ora dare la prima definizione di paraprodotto.

Definizione 1.1.2. *Se* $a \in L^\infty(R^n)$ *e* $u \in C^\mu(R^n)$, $\mu \in R_+ \setminus N$, *poniamo*

$$\pi(a,u) = \sum_{k=2}^{\infty} S_{k-2}(a)\Delta_k(u)$$

(*paraprodotto di* a *e* u).

(Se $\check{\phi} = F^{-1}\phi$, osserviamo che $S_k(a) = 2^{kn}\check{\phi}(2^k\cdot) * a$, e quindi $\|S_k(a)\|_{L^\infty} \leqq \|2^{kn}\phi(2^k\cdot)\|_{L^1}\|a\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{L^1}\|a\|_{L^\infty} = C_\phi\|a\|_{L^\infty}$; dunque, per la Proposizione 1.1.1., la serie scritta converge geometricamente).

Questa definizione è modellata sugli spazi C^s; più avanti, trattando altri spazi, utilizzeremo una definizione (in un senso conveniente) equivalente. Proveremo inoltre che la definizione stessa è indipendente (ancora in un senso conveniente) dalla scelta della funzione ϕ.

Richiamiamo ora alcune proprietà del paraprodotto che possono illustrare il significato della definizione. Si ha:

Proposizione 1.1.3. ([B1], Teorema 2.1). *Se* $a \in L^\infty(R^n)$, *l'operatore* $\Pi(a,\cdot)$ *applica* C^s *in* C^s ($s > 0$, $s \notin N$) *e* H^s *in* H^s *con norma maggiorata da* cost. $\|a\|_\infty$.

Proposizione 1.1.4. ([B1], Teorema 2.3). *Se* a, b $\in C^\rho$($\rho > 0$, $\rho \notin N$), *allora* $\Pi(a,\cdot) \circ \Pi(b,\cdot) - \Pi(ab,\cdot)$ *applica* C^s *in*

$C^{s+\rho}$ $(s > 0,\ s,\ s+\rho \notin N)$ *e* H^s *in* $H^{s+\rho}$ *con norma maggiorata da* cost. $\|a\|_{C^\rho} \|b\|_{C^\rho}$.

<u>Proposizione 1.1.5.</u> ([B1], Teorema 2.5). i) *Siano* $a \in C^\rho$ *e* $u \in C^\sigma$ *a supporto compatto* $(\rho,\sigma > 0,\ \rho,\sigma,\ \rho+\sigma \notin N)$. *Allora*

$$au = \Pi(a,u) + \Pi(u,a) + r,$$

con $\|r\|_{C^{\rho+\sigma}} \leq \text{cost.}\ \|a\|_{C^\rho} \|u\|_{C^\sigma}$.

ii) *Siano* $a \in H^s (s > n/2)$ *e* $u \in H^t (t > n/2)$ *a supporto compatto. Allora* $\forall \varepsilon > 0$

$$au = \Pi(a,u) + \Pi(u,a) + r,$$

con $\|r\|_{H^{s+t-n/2-\varepsilon}} \leq C_\varepsilon \|a\|_{H^s} \|u\|_{H^t}$.

Una proprietà fondamentale del paraprodotto è la seguente formula di Bony che condurrà alla "paralinearizzazione" delle equazioni non lineari.

<u>Proposizione 1.1.6.</u> *Siano* $F \in C^\infty(\mathbf{R},R)$ *e* $u \in C^\mu(R^n)$, $\mu > 0$, $\mu, 2\mu \notin N$. *Allora*

(1.1.6.a) $\quad F(u) - \Pi(F'(u), u) \in C^{2\mu}$.

Analogamente, se $s > n/2$, $u \in H^s(R^n)$ *e* $F(0) = 0$, *allora*

(1.2.6.b) $\quad F(u) - \Pi(F'(u),u) \in \Lambda^{2s}_{1,1} \subseteq H^{2s-n/2}$ (*)(**).

(*) Per la definizione dello spazio di Besov $\Lambda^{2s}_{1,1}$, si veda, ad esempio,[M2]

(**) Per la dimostrazione della osserzione negli spazi holderiani, si veda,

Più in generale, se $F(x,y)$ *è* C^∞ *su* $R^n \times R^N$, *limitata con tutte le sue derivate su ogni insieme* $R^n \times K$, K *compatto di* R^N *e* $u_1,\dots,u_N \in C^\mu(R^n)$ $(\mu, 2\mu \notin N)$, *si ha:*

$$(1.2.6.c) \qquad F(x,u_1(x),\dots,u_N(x)) - \sum_{j=1}^{N} \Pi\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(x,u_1,\dots,u_N),\ u_j\right) \in C^{2\mu}$$

L'asserzione viene poi modificata come sopra nel caso degli spazi di Sobolev.

Accenniamo la dimostrazione della (1.2.6.a). Per prima cosa, osserviamo che, se $v \in C^s$, $w \in C^\sigma$, allora $\Pi(v,w) - \sum_{k=0}^{\infty} S_k(v)\Delta_k(w) \in C^{s+\sigma}$; dunque basterà provare che $F(u) - \sum_{k=0}^{\infty} S_k(F'(u))\ \Delta_k(u) \in C^{2\mu}$. Poniamo allora $u_k = S_k(u)$ e $v_k = \Delta_k(u) = u_{k+1} - u_k$. Allora

$$F(u) = F(u_0) + (F(u_1)-F(u_0)) + (F(u_2)-F(u_1)) + \dots =$$

$$= F(u_0) + (F(u_0+v_0) - F(u_0)) + (F(u_1+v_1) - F(u_1)) + \dots =$$

$$= F(u_0) + v_0\ F'(u_0) + \text{errore} + v_1\ F'(u_1) + \text{errore} + \dots =$$

$$= F(u_0) + v_0\ S_0(F'(u)) + \text{errore} + v_1\ S_1(F'(u)) + \text{errore} + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v_k\ S_k(F'(u)) + \text{errori}.$$

Ora gli errori costituiscono due serie: la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k, \text{ dove } R_k = F(u_k+v_k)-F(u_k)-v_kF'(u_k),$$

./. ad esempio, [ME], XI, Teorema 14 . La parte negli spazi di Sobolev è dovuta a Y. Meyer ([M1]), Teorema 2 e [M2].

la seconda $\sum_{k=0}^{\infty} v_k \, \rho_k$, dove $\rho_k = S_k(F'(u)) - F'(S_k(u))$. E' possibile allora verificare che $\| D^{\alpha} R_k \|_{L^{\infty}} \leq C 2^{(|\alpha|-2\mu)k}$ e che un'analoga stima vale per $\| D^{\alpha}(\rho_k \, v_k) \|_{L^{\infty}}$ (questa è la parte più delicata della dimostrazione). Dunque (si veda ad esempio [ME] X, Lemma 3) ciascuna delle due serie appartiene a $C^{2\mu}$.

I risultati precedenti possono chiarire il significato dal termine "paraprodotto": infatti $\Pi(a,u)$ è, per le Proposizioni 1.1.5. e 1.1.3. "la metà del prodotto di a e di u che conserva la regolarità di u" modulo un errore di regolarità superiore. Inoltre, la (1.1.6.c) asserisce in particolare che, se $a \in C^{\infty}(R^n)$ e $u \in C^{\mu}(R^n)$, allora $\Pi(a,u) = au$ + errore, dove l'errore ha regolarità 2μ mentre $\Pi(a,u)$ ha regolarità μ.

1.2. Ricordiamo che $S^m_{\rho,\delta}(R^n)$ $(m \in R,\ 0 \leq \rho,\delta \leq 1)$ denota lo spazio delle funzioni $p \in C^{\infty}(R^n \times R^n)$ tali che per ogni compatto $K \subseteq R^n$, per ogni $\alpha, \beta \in N^n_0$ $(=(N \cup \{0\})^n)$ esiste $C = C(K,\alpha,\beta)$ tale che

$$|D^{\alpha}_x D^{\beta}_{\xi} \, p(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$$

A p si può associare l'operatore $P(x,D)$ dato da

$$p(x,D)u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \, p(x,\xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi$$

se $u \in C^{\infty}_0(R^n)$. Se $\delta < 1$, P si prolunga con continuità da $\mathcal{E}'(R^n)$ a $\mathcal{D}'(R^n)$ e si ha il seguente risultato fondamentale.

<u>Teorema 1.2.1.</u> (Calderon-Vaillancourt). *Sia* $p \in S^0_{\rho,\rho}(R^n)$,

$0 \leq \rho < 1$. *Allora* $p(x,D)$ *è continuo da* $L^2(R^n)$ *a* $L^2_{loc}(R^n)$.

Nel caso $\rho = 1$ l'asserto non è però, in generale, vero. Osserviamo che dal Teorema 1.2.1 discende la L^2-continuità per l'operatore $p(x,D)$ se $p \in S^0_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$.

Nel seguito supporremo per semplicità che le stime che intervengono siano uniformi su R^n, cioè che la costante $C(K,\alpha,\beta)$ sia indipendente da K.

Per quanto riguarda la classe $S^0_{1,1}(R^n)$ è possibile provare il risultato seguente (si veda, ad esempio, [ME] X, Teorema 6).

Teorema 1.2.2. (E. Stein). *Sia* $p \in S^0_{1,1}$; *allora* $p(x,D)$ *è continuo da* $H^s(R^n)$ *a* $H^s(R^n)$ *per ogni* $s > 0$ *e da* $C^s(R^n)$ *a* $C^s(R^n)$ *per ogni* $s > 0$ *non intero.*

Per definire gli operatori paradifferenziali di J.M. Bony introdurremo ora alcune sottoclassi di $S^m_{1,1}$ che definiscono operatori L^2-continui.

Definizione 1.2.3. *Denotiamo con* $\sum^m_0$ *l'insieme delle funzioni* $\sigma \in C^\infty(R^n x R^n)$ *tali che*

(1.2.3.a) $\forall \beta \in N^n_0$, $\forall (x,\xi) \in R^{2n}, |D^\beta_\xi \sigma(x,\xi)| \leq C_\beta (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$

(1.2.3.b) *esiste* $\varepsilon < 1$ *tale che la trasformata di Fourier in* x *di* σ $\hat{\sigma}(\eta,\xi)$ *ha supporto nel cono* $|\eta| \leq \varepsilon|\xi|$.

Se $r > 0$, $r \notin N$, *denoteremo con* $\sum^m_r$ *l'insieme delle funzioni* $\sigma \in C^\infty(R^n x R^n)$ *che soddisfano* (1.2.3.b) *e tali che*

(1.2.3.c) $\forall\beta \in N_0^n$, $\forall \xi \in R^n$, $\| D_\xi^\beta \sigma(\cdot,\xi) \|_{C^r(R^n)} \leq C_\beta (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$.

Osserviamo che, per la disuguaglianza di Bernstein, se $p\in \sum_0^m$, allora $|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C'_\beta(\varepsilon|\xi|)^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \leq$ $\leq C'_\beta (1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}$. Si hanno dunque le inclusioni

$$\sum_r^m \subseteq \sum_0^m \subseteq S_{1,1}^m$$

Ai simboli di $\sum_0^0$ si applica quindi il Teorema 1.2.2. Ma si ha di più il risultato seguente.

Teorema 1.2.4. *Se* $p\in \sum_0^0$, *allora* $p(x,D)$ *è continuo da* L^2 *in sé.*

Il Teorema può essere provato direttamente (si veda, ad esempio, [ME]X, Teorema 11);tuttavia lo riotterremo come conseguenza del Teorema di David e Journé sui nuclei singolari (Teorema 2.2.1).

Gli operatori $p(x,D)$, con $p \in \sum_0^m$ verranno detti operatori paradifferenziali; vediamo ora la connessione di questi con il paraprodotto introdotto precedentemente.

Teorema 1.2.5.. *Sia* $\psi = \psi(\eta,\xi)$ *una funzione* C^∞ *su* $R^n \times R^n$ *tale che, per certi* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, R \in R_+$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, *risulta*

(1.2.5.a) $\psi(\eta,\xi) = 0$ se $|\eta| \geq \varepsilon_2|\xi|$;

(1.2.5.b) $\psi(\eta,\xi) = 1$ se $|\eta| \leq \varepsilon_1|\xi|$ e $|\xi| \geq R$

(1.2.5.c) $\forall \alpha,\beta \in N_0^n$ $|D_\eta^\alpha D_\xi^\beta p(\eta,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|}$

$\forall(\eta,\xi) \in R^{2n}$.

(osserviamo che è possibile costruire una ψ *così fatta). Se* $a \in L^\infty(R^n)$ $(a \in C^r(R^n),\ r > 0,\ r \notin N)$, *allora il simbolo*

$$(1.2.5.d) \qquad \sigma_a(x,\xi) = (2\Pi)^{-n} \int e^{i\eta x}\ \psi(\eta,\xi)\ \hat{a}(\eta)d\eta$$

appartiene a $\sum_0^0 \ (\sum_r^0)$.

Inoltre, se ψ_1 *e* ψ_2 *sono due funzioni che verificano* (1.2.5.a)-(1.2.5.c), *indicando provvisoriamente con* $\sigma_a^{\psi 1}$ *e* $\sigma_a^{\psi 2}$ *i simboli associati ad a tramite* ψ_1 *a* ψ_2 *secondo la* (1.2.5.d), *se* $a \in C^r(R^n)$, $u \in C^\mu(R^n)$ $(r,\mu,$ $r+\mu$ *positivi e non interi), risulta*

$$\sigma_a^{\psi_1}(x,D)u - \sigma_a^{\psi_2}(x,D)u \in C^{r+\mu}(R^n)$$

(la definizione data è cioè indipendente da ψ *modulo termini r-regolarizzanti).*

<u>Teorema 1.2.6.</u> *Sia* ρ *una funzione radiale nonnegativa di classe* C^∞ *su* R^n *tale che* $\rho(\xi) \equiv 1$ *se* $|\xi| \leqq 1/2$, $\phi(\xi) \equiv 0$ se $|\xi| \geqq 1$. *Allora la funzione*

$$(1.2.6.a) \qquad \psi(\eta,\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \phi(\eta/2^{k-2})(\phi(\xi/2^{k+1})-\phi(\xi/2^k))$$

soddisfa (1.2.5.a)-(1.2.5.c) *(con* $\varepsilon_1 = 1/8$, $\varepsilon_2 = 1/2$, $R = 4$) *e di più, per ogni* $a \in L^\infty(R^n)$,

$$(1.2.6.b) \qquad \sigma_a(x,D)u = \Pi(a,u).$$

Accenneremo più avanti la dimostrazione di questi Teoremi. Osserviamo che la (1.2.6.b) dice che il paraprodotto con una funzione L^∞ è

un operatore paradifferenziale di ordine zero come il prodotto con una funzione C^∞ è un operatore pseudodifferenziale di ordine zero. Inoltre, dal Teorema 1.2.5 segue che, se $a \in C^r$ e $u \in C^\mu$, variando la funzione ϕ nella definizione di paraprodotto, l'errore è $C^{r+\mu}$ e quindi r-regolarizzante in quanto $\Pi(a,u) \in C^u$.

<u>Dimostrazione del Teorema 1.2.5.</u> Limitiamoci a provare la prima asserzione; la seconda è più delicata: si veda, ad esempio, [ME] X, Lemma 9.

L'integrale in (1.2.5.d) ha un significato solo formale. Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni della Definizione 1.2.3. La (1.2.3.b) è immediata, in quanto $\sigma_a(\eta,\xi) = \psi(\eta,\xi)\ a(\eta)$.

Osserviamo ora che, denotata con $G(\cdot,\xi)$ la trasformata di Fourier inversa di $\psi(\cdot,\xi)$, $G(\cdot,\xi) \in L^1(R^n)$ e, di più,

$$\forall\beta \in N_o^n,\ \forall\xi \in R^n \quad \| D_\xi^\beta\, G(\cdot,\xi) \|_{L^1(R^n)} \leq C_\beta (1+|\xi|)^{-|\beta|}$$

Infatti, $\forall\alpha \in N_o^n$,

$$|\xi|^\alpha |y^\alpha\, D_\xi^\beta\ G(y,\xi)| = |\xi|^\alpha \left| \int e^{iy\eta}\ D_\eta^\alpha D_\xi^\beta\ \psi(\eta,\xi)\ d\eta \right| \leq$$

$$\leq \text{(per (1.2.5.a) e (1.2.5.c)) } C'_{\alpha\ \beta} |\xi|^{n+\alpha} (1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \leq$$

$$\leq C'_{\alpha,\beta}\ |\xi|^n\ (1+|\xi|)^{-|\beta|};$$

sommando per $|\alpha| \leq n+1$ si ha allora

$$|D_\xi^\beta\ G(y,\xi)| \leq C'_\beta \ \frac{|\xi|^n}{(1+|y|\,|\xi|)^{n+1}}\ (1+|\xi|)^{-|\beta|},$$

da cui l'asserto. Si può allora scrivere (e l'integrale converge)

$$\sigma_a(x,\xi) = \int a(n-y)\, G(y,\xi)\, dy$$

Dunque la (1.2.3.a) segue immediatamente.

Dimostrazione del Teorema 1.2.6. Osserviamo che per ogni $(\eta,\xi) \in R^{2n}$, la serie in (1.2.6.a) ha al più tre termini non nulli, corrispondenti agli indici k tali che $|\eta| \leq 2^{k-2}$ e $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$; la verifica di (1.2.5.a)-(1.2.5.c) è immediata. Per provare (1.2.6.b), basterà supporre $u \in S$ e $a \in L^\infty$. Per semplicità, denotiamo con ϕ_k la funzione $\phi(\cdot/2^k)$ e con θ_k la funzione $\phi_{k+1} - \phi_k$; denotiamo inoltre con $\check{\phi}_k$ la trasformata di Fourier inversa di ϕ_k. Si ha:

$$S_k(a)(x) = \int dy\, \check{\phi}_k(x-y)\, a(y)\, dy$$

$$(\Delta_k u)(x) = (2\Pi)^{-n} \int e^{ix\xi}\, \theta_k(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi;$$

dunque

$$(S_{k-2}(a)\Delta_k(u))(x) = (2\pi)^{-n} \int d\xi\, e^{ix\xi}\, \hat{u}(\xi)\, .$$

$$\cdot \int dy\, \check{\phi}_k(x-y)a(y)\theta_k(\xi) = (2\pi)^{-n} \int d\xi\, e^{ix\xi}\, \hat{u}(\xi)\sigma_k(x,\xi).$$

Osserviamo che per ogni $\xi \in R^n$ la serie

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_k(x,\xi)$$

ha al più tre termini non nulli; dunque

$$\sigma(x,\xi) = \int dy\ \theta_k(\xi) \sum_{k=2}^{\infty} \phi_k(x-y)\ a(y) =$$

$$= \int dy\ \Gamma\ (x-y,\xi)\ a(y).$$

Poiché $|\sigma_k(x,\xi)| \leq \|\check{\phi}_k\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} \|\theta_k\|_{L^\infty} \leq 2\|\check{\phi}_k\|_{L^1} \|\phi_k\|_{L^\infty} \|a\|_{L^\infty} =$

$$= 2\|\check{\phi}\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty} \|a\|_{L^\infty},$$

per il teorema della convergenza dominate si ha:

$$\Pi(a,u)(x) = \sum_{k=2}^{\infty} S_k(a)\ (\Delta_k u)(x) =$$

$$= \int d\xi\ e^{ix\xi}\ \hat{u}(\xi)\ \sigma\ (x,\xi) = \sigma(x,D)u.$$

L'asserzione segue allora dal fatto che $\Gamma(\cdot,\xi) = \hat{\psi}(\cdot,\xi)$.

E' possibile comporre gli operatori pseudodifferenziali con operatori di tipo (1,1). Si ha infatti:

Teorema 1.2.7. *Sia* $\tau \in S^{m'}_{1,1}(R^n)$ *e sia* $\sigma \in \sum^m_r$ ($r > 0$ *non intero*). *Allora il simbolo*

$$(1.2.7.a) \qquad (\tau \# \sigma)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<r} (-i)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!}\ \partial^\alpha_\xi \tau(x,\xi)\, \partial^\alpha_x \sigma(x,\xi)$$

appartiene a $S^{m+m'}_{1,1}(R^n)$.

Inoltre, esiste $\rho \in S^{m+m'-r}_{1,1}(R^n)$ *tale che*

$\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = (\tau \# \sigma)(x,D) + \rho(x,D).$

(Osserviamo che, se $q \in S^{m'}_{1,1}(R^n)$ e $p \in S^{m}_{\rho,\delta}(R^n)$, la composizione $q(x,D) \circ p(x,D)$ è "buona" nel senso che rispetta le regole del calcolo se $\delta < 1$, ma ciò non è più vero se $\delta = 1$). Per una dimostrazione, si veda [ME], XI, Teorema 19.

1.3. Vediamo ora come è possibile associare a un simbolo poco regolare nelle variabili di spazio un operatore paradifferenziale. Il procedimento è analogo a quello utilizzato per la seconda definizione di paraprodotto.

Definizione 1.3.1. *Siano* $m \in R$, $r > 0$, $r \notin N$. *Denoteremo con* Γ^m_r *lo spazio delle funzioni* $p(x,\xi)$, C^∞ *in* ξ *e* C^r *in* x *tali che,* $\forall \beta \in N^n_o$ *esiste* C_β *tale che*

$$\| D^\beta_\xi \, p(\cdot,\xi)\|_{C^r} \leq C_\beta \, (1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Se ψ *è una funzione come quella del Teorema 1.2.5., poniamo*

$$(1.3.1.a) \qquad \sigma_q(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\eta x} \, \psi(\eta,\xi) \, \hat{p}(\eta,\xi) d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int G(y,\xi) p(x-y,\xi) dy,$$

dove $G(\cdot,\xi) = F^{-1}(\psi(\cdot,\xi))$.

Come nel caso del paraprodotto $(p(x,\xi) = a(x))$ *si ha*

$$\sigma_p \in \sum\nolimits^m_r .$$

Teorema 1.3.2. (Calcolo simbolico). *Sia* $\rho \in \Gamma^m_r$. *Allora*

$\forall \beta \in N_o^n \quad \partial_\xi^\beta \rho \in \Gamma_r^{m-|\beta|}$ e $\sigma_{\partial_\xi^\beta \rho} - \partial_\xi^\beta \sigma_\rho \in S_{1,1}^{m-|\beta|-r}$.

Inoltre, se $|\alpha| < r$, $\partial_x^\alpha p \in \Gamma_{r-|\alpha|}^m$ *e* $\sigma_{\partial_x^\alpha p} = \partial_x^\alpha \sigma_p$.

Indicheremo con $\tilde{\Gamma}_r^m$ $(m \in R,\ r > 0,\ r \notin N)$ *lo spazio delle somme* $p = \sum_{j<r} p_j$, $p_j \in \Gamma_{r-j}^{m-j}$. *Posto allora* $\sigma_p = \sum_{j<r} \sigma_{p_j}$, *risulta* $\sigma_p \in \sum_r^m$.

Inoltre, se $p = \sum_{j<r} p_j$ *appartiene a* $\tilde{\Gamma}_r^m$ *e* $q = \sum_{j<r} q_j$ *appartiene a* $\tilde{\Gamma}_r^{m'}$, *posto*

$$p \# q \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j+k+|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_j D_x^\alpha q_k ,$$

risulta $p \# q \in \tilde{\Gamma}_r^{m+m'}$ e

$$\sigma_{p\# q} - \sigma_p \# \sigma_q \in S_{1,1}^{m+m'-r}(R^n),$$

dove $\sigma_p \# \sigma_q$ *è stato definito in* (1.2.7.a).

<u>Dimostrazione</u>: si vedano, ad esempio, Lemma 24 e Teorema 25 di [ME], X.

<u>Definizione 1.3.3.</u> *Diremo che* $p \in \Gamma_r^m$ $(m \in R,\ r > 0$ *non intero*) *è ellittico in* R^n *se esistono* $R \geq 0$, $C > 0$ *tali che*

(1.3.3.a) $\quad \forall \xi \in R^n,\ |\xi| \geq R\ ,\quad |p(x,\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m$.

Se $p \in \tilde{\Gamma}_r^m$, *si dirà che* p *è ellittico se* p_o *è ellittico.*

Con un procedimento analogo a quello che si utilizza per costruire la parametrice di un operatore pseudodifferenziale ellittico usuale, tenendo conto del Teorema 1.3.2. si può provare il seguente risultato (si veda, ad esempio, [ME], XI, Teorema 27).

Teorema 1.3.3. *Sia* $p \in \tilde{\Gamma}^m_r$ *ellittico in* R^n. *Allora esistono* $h \in C^\infty(R^n)$ $(h(\xi) \equiv 1$ *se* $|\xi| \geq R + 1)$, $q_1, q_2 \in \tilde{\Gamma}^{-m}_r$ *tali che*

$$p \# q_1 = q_2 \# p = h.$$

1.4. Vediamo ora una semplice applicazione delle tecniche descritte precedentemente.

Sia F una funzione C^∞ su $R^n \times R^n$, dove $N = \text{card}\{\alpha \in N^n_0, |\alpha| \leq m\}$; consideriamo una equazione della forma

$$(1.4.a.) \qquad F(x, u(x), \partial_1 u(x), \ldots, \partial^\alpha u(x), \ldots)_{|\alpha| \leq m} = 0.$$

Denotiamo con $c_\alpha(x)$ la derivata di F rispetto alla variabile occupata dalla derivata di ordine α calcolata nel punto $(x, \partial_1 u(x), \ldots)$ e poniamo

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x)\ (i\xi)^\alpha.$$

Tutto ciò è ben definito se $u \in C^{m+\mu}(R^n)$, $\mu > 0$ non intero; in tal caso $c_\alpha \in C^\mu(R^n)$. Osserviamo inoltre che $p \in \Gamma^m_\mu$.

Teorema 1.4.1. *Sia* $u \in C^{m+\mu}(R^n)$ $(\mu > 0, \mu, 2\mu$ *non interi) soluzione di* (1.4.a). *Supponiamo che*

$$p_0 = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)\ (i\xi)^\alpha$$

sia ellittico su R^n. *Allora* $u \in C^{m+2\mu}(R^n)$ (*e quindi* $u \in C^\infty(R^n)$).

Dimostrazione. Il simbolo p è ellittico poiché p_0 lo è. D'altra parte, il simbolo σ_p associato a p è

$$(2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|\leq m} (i\xi)^\alpha \int e^{i\eta x}\ \psi(\eta,\xi)\ \hat{c}_\alpha(\eta)\ d\eta,$$

per cui (Teorema 1.2.6)

$$\sigma_p(x,D)v = \sum_{|\alpha|\leq m} \pi(c_\alpha, \partial^\alpha v).$$

D'altra parte della (1.2.6.e) (formula di paralinearizzazione) si ha che

$$0 = F(x,u(x,)\dots) = \sum_{|\alpha|\leq m} \Pi(c_\alpha,\ \partial^\alpha u) + \text{errore } C^{2\mu} =$$

$$= \sigma_p(x,D)u + \text{errore } C^{2\mu},$$

e dunque $\sigma_p(x,D)u = f \in C^{2\mu}$. Per il Teorema 1.3.3. esiste $q \in \tilde{\Gamma}^{-m}_\mu$ tale che $q \# p = h(\xi)$, dove $h \equiv 1$ fuori da un compatto. Il simbolo $\tau = \sigma_q\ \sum^{-m}_{\mu} \subseteq S^{-m}_{1,1}(R^n)$, mentre si può sempre supporre che il simbolo associato ad h sia h stessa e dunque, per il Teorema 1.3.2., esiste $\rho_1 \in S^{-\mu}_{1,1}$ tale che

$$\tau \# \sigma_p = \sigma_{q\,\#\,p} + \rho_1 = h + \rho_1 = 1 + h - 1 + \rho_1 = 1 + \rho_2,$$

dove $\rho_2 \in S^{-\mu}_{1,1}$, in quanto $h-1 \in C^\infty_0(R^n)$.

Allora, per il Teorema 1.2.7., esiste $\rho \in S^{-\mu}_{1,1}(R^n)$ tale che

$$\tau(x,D) \circ \sigma_p(x,D) = Id + \rho(x,D),$$

e dunque

$$\tau(x,D)\, f = u + \rho(x,D)u,$$

da cui l'asserto.

Le tecniche descritte precedentemente permettono in realtà di ottenere risultati di regolarità in situazioni più generali e in forma microlocale. Consideriamo, ad esempio, il caso di u soluzione dell'equazione quasilineare

$$(1.4.b) \qquad \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} A_\alpha(x,u(x),\ldots,\partial^\beta u(x),\ldots)_{|\beta|\leq|\alpha|-1}\, \partial^\alpha u + A_0(x,u(x)) = 0$$

Se $u \in C^\rho_{loc}$ con $\rho > m-1/2$, $\rho \notin N(H^s_{loc}$ con $s > \max\{n/2+m-1, n/4 + m-1/2\})$ e (x_0,ξ_0) non è caratteristico(*), allora u è microlocalmente di classe $C^{2\rho-m+1}$ $(H^{2s-n/2-m+1})$ in (x_0,ξ_0).

Analogamente, se u è soluzione dell'equazione semilineare

$$(1.4.c) \qquad \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u + \beta(x,u(x)) = 0,$$

si ha che se $u \in C^\rho_{loc}$, $\rho > 0$, $\rho \notin N$ $(H^s_{loc}$, $s > n/2)$ e (x_0,ξ_0) è non ca-

---

(*) Cioè $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0,u(x_0),\ldots)(i\xi_0)^\alpha \neq 0.$

ratteristico(*), allora u è microlocalmente di classe $C^{2\rho+m}$ ($H^{2s+m-n/2}$) in (x_0,ξ_0).

Questi risultati sono contenuti nel Teorema 5.4 di Bony [B1], tenendo conto di [M1].

Analogamente si possono dare risultati di propagazione delle singolarità ([B1], Teorema 6.1), regolarità microlocale per problemi al contorno, di riflessione delle singolarità nel caso trasverso ([ST]).

Osserviamo infine che tecniche diverse per lo studio microlocale di equazioni non lineari sono utilizzati in [B/R 1] e [B/R 2]. In particolare, in [B/R 2] viene sviluppato un calcolo pseudodifferenziale per simboli "poco regolari" nelle variabili x. Sempre con tecniche diverse in [B2] e [MR] vengono studiate più completamente le singolarità di equazioni iperboliche semilineari del tipo $\Box u = f(x,u(x))$.

2. INTEGRALI SINGOLARI

2.1. Vediamo ora una utilizzazione di tecniche analoghe per la dimostrazione di un risultato di L^2-continuità per integrali singolari.

Sia $T\colon \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}'(R^n)$ un operatore lineare continuo. Per il teorema del nucleo di Schwartz, esiste $K \in \mathcal{D}'(R^n x R^n)$ (nucleo distribuzioni di T) tale che $\langle Tf,g\rangle = \langle K,f \otimes g\rangle$ $\forall f,y \in \mathcal{D}(R^n)$. Ci si domanda allora se sia possibile caratterizzare la (eventuale) L^2-continuità di T in termini di K. Ci limiteremo al caso in cui K soddisfi le seguenti condizioni (condizioni di Calderon-Zygmund): denotiamo con Δ la diagonale di R^{2n} $\Delta = \{(x,y) \in R^{2n};\ x = y\}$ e poniamo $\Omega = R^n \setminus \Delta$. Supporremo che:

(*) Cioè $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(X_0)(i\xi_0)^\alpha \neq 0$

esistano $\varepsilon \in]0,1]$ e $C > 0$ *tali che la restrizione di* K *a* Ω *sia una funzione verificante le seguenti proprietà:*

(2.a) $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$ $\forall (x,y) \in \Omega;$

(2.b) $|K(x',y) - K(x,y)| \leq C|x-x'|^{\varepsilon} |x-y|^{-n-\varepsilon}$

$\forall (x,y),(x',y) \in \Omega$ *tali che* $|x-x'| < \frac{1}{2} |x-y|$;

(2.c) $|K(x,y') - K(x,y)| \leq C|y-y'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-e}$

$\forall (x,y),\ (x,y') \in \Omega$ *tali che* $|y-y'| \leq \frac{1}{2} |x-y|$.

Ad esempio, se $p \in S^{0}_{1,0}(R^n)$, allora il nucleo distribuzioni di $p(x,D)$ dato da $K(x,y) = F^{-1}(p(x,\cdot))(x-y)$, $x,y \in \Omega$, verifica (2.a-(2.c) con $\varepsilon = 1$. Analogamente, se $p \in S^{0}_{1,1}(R^n)$ si può verificare che, fuori da Δ, il suo nucleo distribuzioni K verifica la stima

$$|D^{\alpha}_{x} D^{\beta}_{y} (x,y)| \leq C_{\alpha,\beta} |x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$$

e quindi (2.a)-(2.c) con $\varepsilon = 1$.

Un esempio invece fuori dell'ambito pseudodifferenziale è il seguente (A.P. Calderon; si veda, ad esempio, [C] e [J]): sia $A:R \to R^n$ una funzione lipschitziana e sia $F \in C^{\infty}(R^n)$; se $x,y \in R$, $x \neq y$, poniamo

(2.d) $$K(x,y) = F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right) \frac{1}{x-y} .$$

E' possibile allora associare a K un operatore lineare continuo $T: \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}'(R^n)$ tramite il procedimento usuale di valore principale. Poniamo cioè ($f,g \in \mathcal{D}(R)$):

$$\langle Tf,g\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \iint_{|x-y|\geq\varepsilon} dx\, dy\, K(x,y)g(x)f(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, K(x,y)(g(x)f(y)-f(x)g(y)) ,$$

in quanto $K(x,y) = -K(y,x)$. E' immediato verificare che su Ω K coincide con il nucleo distribuzioni di T e che K verifica (2.a)-(2.c). L'interesse dei nuclei del tipo (2.d) può essere illustrato nel modo seguente. Osserviamo preliminarmente che, se $F \equiv 1$, T è la trasformata di Hilbert. Sia ora γ una curva lipschitziana in C di parametrizzazione $x \to x+i\, g(x)$, x R, dove $g: R \to R$ è lipschitziana. Se $f \in C_0^\infty(R)$, $z \in C\setminus\gamma$, consideriamo l'integrale di Cauchy

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+i\phi'(y)}{z-[y+i\phi(y)]}\, f(y)dy.$$

Il limite di G(z) quando z tende a $x + i\phi(x)$ da sopra γ e non tangenzialmente(se esiste)è dato da

$$\text{(2.e)}\qquad \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-y}\left(1+i\,\frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y}\right)^{-1} f(y)(1+i\phi'(y))dy$$

e questo integrale è del tipo (2.d), a parte il fattore $1+i\phi'(y)$ che può essere incorporato in f. La connessione di questo tipo di integrali singolari con questioni classiche (in particolare con potenziali di multistrato in domini con frontiera lipschitziana) è illustrato in [M3] , [J], [C]. Un caso di particolare interesse di (2.d) è dato da $F:R \to R$, $F(z) = z^k$, $k = 0,1,\ldots$, da un lato perché integrali di questo tipo si presentano sviluppando formalmente in serie l'integrale in (2.e), dall'altro per

ché connessi al "problema dei commutatori" ([C]).

Ricordiamo che la continuità L^2 degli operatori $p(x,D)$ con $p \in S^0_{1,0}$ è contenuta nel teorema di Calderon-Vaillancourt, mentre se $p \in S^0_{1,1}$ non si ha in genere continuità L^2. La continuità L^2 degli integrali singolari del tipo (2.d) è stata provata recentemente in [C/McI/M] e [C/D/M]. In questa seconda parte del seminario presenterò un risultato recente di G. David e J.L. Journé che caratterizza completamente i nuclei soddisfacenti (2.a)-(2.c) associati a un operatore L^2-continuo(*). Si riottengono così i risultati precedenti e si caratterizzano i simboli $p \in S^0_{1,1}$ per cui $p(x,D)$ è L^2-continuo; in particolare si prova che gli operatori paradifferenziali di ordine zero sono L^2-continui.

2.1. Premettiamo alcune definizioni.

Definizione 2.1.1. *Diremo che* $u: R^n \to C$ *appartiene a* $BMO(R^n)$ *se* $u \in L^1_{loc}(R^n)$ *e se esiste una costante* $C \geq 0$ *tale che per ogni sfera* $B \subseteq R^n$ *di volume* $|B| > 0$ *tale che, posto* $u_B = |B|^{-1} \int_B u(x)dx$, risulta

$$|B|^{-1} \int_B |u-u_B|dx \leq C.$$

Ovviamente, le funzioni di BMO sono definite modulo le funzioni costanti. Inoltre, se $u \in BMO, \int |u(x)|(1+|x|^{n+1})^{-1}dx < +\infty$.

Il ruolo di BMO nello studio degli operatori di Calderon-Zygmund è illustrato dal seguente teorema di Fefferman-Stein ([F/S]).

Teorema 2.1.2. *Ogni operatore di Calderon-Zygmund definisce canonicamente una applicazione lineare continua di* L^∞ *in* BMO (per la dimostrazione si veda [F/S] o [C/M], V, Teorema 24).

(*) Chiameremo tali operatori "operatori di Calderón-Zygmund".

In particolare, se T è un operatore di Calderón-Zygmund, $T(1) \in BMO$. D'altra parte se $T: \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}'(R^n)$ è lineare continuo e il suo nucleo verifica (2.a)-(2.c), è possibile definire canonicamente $T(1)$ (in generale $T(u)$ per $u \in C^\infty \cap L^\infty$) come una forma lineare continua nel sottospazio $\mathcal{D}_0(R^n) \subseteq \mathcal{D}(R^n)$ delle funzioni test ϕ tali che $\int\phi(x)dx=0$ (si veda [M4] o [M5]) (si osservi che $\mathcal{D}_0(R^n)$ è un sottospazio denso dello spazio $H^1(R^n) = ((BMO)(R^n))^*$([F/S])(*).

Diamo ora la definizione di operatore da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ di ordine zero.

<u>Definizione 2.1.3.</u> *Una applicazione lineare continua* $T: \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}'(R^n)$ *verrà detta di ordine zero se per ogni sottoinsieme limitato* $B \subseteq \mathcal{D}(R^n)$ *esiste una costante* $C = C(B)$ *tale che* $\forall u \in R^n$, $\forall \delta \in \bar{R}$, $\forall \phi_1, \phi_2 \in B$ *si ha*

$$(2.1.3.a) \qquad |\langle T\, \phi_1\left(\frac{x-u}{\delta}\right), \phi_2\left(\frac{x-u}{\delta}\right)\rangle| \leq C\delta^n.$$

Ad esempio, ogni operatore lineare continuo da L^2 in sé è di ordine zero, perché il primo membro di (2.1.3.a) si maggiora con $\delta^n \|T\| \|\phi_1\|_{L^2} \|\phi_2\|_{L^2}$. Invece l'operatore $\frac{\partial}{\partial x_j}$ non è di ordine zero. Se il nucleo distribuzioni K di T verifica (2.a)-(2.c) e di più $K(x,y) = -K(y,x)$, allora T è di ordine zero; infatti, in tal caso, il primo membro di (2.2.3.a) è uguale a

---

(*) $H^1(R^n)$ è lo spazio delle funzioni $f \in L^1(R^n)$ tali che $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1} < +\infty$, dove $R_j f$ è la trasformata di Riesz, $\widehat{R_j f}(\xi) = (i\xi_j/|\xi|)\hat{f}(\xi)$.

$$\frac{\delta^n}{2} \left| \iint dx\, dy\, K(\delta x+u, \delta y+u)(g(x)f(y) - g(y)f(x)) \right| \leq$$

$$\leq C\delta^n (\max(|\nabla g|+|g|) \max(|\nabla f|+|f|) \cdot \iint_{U\times U} dx\, dy\, |x-y|^{-n+1},$$

dove U è un compatto tale che supp $f \subseteq U$, supp $g \subseteq U$.

Osserviamo infine che la sola condizione $K(x,y) = -K y,x)$ non assicura la L^2-continuità di T. Il controesempio seguente è dovuto a Y. Meyer ([M4], 1.1).

Sia $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dispari; poniamo

$$K(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i2^k(x+y)}\, 2^k \psi(2^k(x-y)).$$

Poiché $K(x,y) = -K(y,x)$ e (2.a)-(2.c) sono verificate, l'operatore T può essere definito come valore principale. D'altra parte, se T fosse L^2-continuo, per il teorema di Fefferman e Stein, risulterebbe

$$\psi(1) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i2^k x} = T(1) \in BMO,$$

che è vero solamente se $\psi(1) = 0$.

In particolare, dall'esempio precedente segue che un operatore di ordine zero non è necessariamente L^2-continuo.

2.2. - Teorema 2.2.1. (G. David e J.L. Journé [D/J]). *Sia* $T: \mathcal{D}'(R^n) \to \mathcal{D}(R^n)$ *un operatore lineare continuo il cui nucleo distribuzioni verifica* (2.a)-(2.c). *Sono allora equivalenti le affermazioni*

(*) T è L^2-*continuo*;

(**) $\begin{cases} T(1) \in BMO\ (R^n) \\ T^*(1) \in BMO\ (R^n) \\ T \text{ è } \textit{di ordine zero} \end{cases}$

Per quanto visto precedentemente, (*) implica (**).

Vediamo ora qualche applicazione. Osserviamo per prima cosa che, se $K(x,y) = -K(y,x)$, le tre condizioni di (**) si riducono alla sola $T(1) \in BMO$. Consideriamo il nucleo (2.d) con $F:R \to R$, $F(z) = z^k$ e sia T_k l'operatore associato. Procediamo ora per induzione su $k \in N_0$, osservando che T_0 è la trasformata di Hilbert e dunque è L^2-continuo. D'altra parte, se T_k è L^2-continuo, dal momento che $A' \in L^\infty(R)$, si ha (per il teorema di Fefferman e Stein)

$$T_{k+1}(1) = T_k(A') \in BMO,$$

e ciò prova che (**) è soddisfatta.

Una stima accurata da poi $\|T_k\| \leq \pi C^k \|A'\|^k_{L^\infty}$, e quindi, se $\|A'\|_{L^\infty}$ è sufficientemente piccola, la continuità L^2 dell'integrale in (2.e). Questo risultato era stato già ottenuto da A.P. Calderon nel 1977. Osserviamo che la limitazione su $\|A'\|_{L^\infty}$ può essere rimossa grazie a un risultato di G. David ([J], Cap. 8), riottenendo il Teorema di [C/McI/M].

Osserviamo inoltre che le tre condizioni di (**) possono essere sostituite dalle seguenti:

(***) $\begin{cases} \|T(e^{ix\theta})\|_{BMO} \leq C \quad \forall \theta \in R^n \\ T^*(1) \in BMO \end{cases}$

(si veda, ad esempio, [M4], 1.5). Se allora $\sigma \in S^{o}_{1,1}(R^n)$,
$\|\sigma(x,D)e^{ix\theta}\|_{BMO} = \|\sigma(x,\theta)e^{i\theta x}\|_{BMO} \leq \|\sigma(x,\theta)e^{i\theta x}\|_{L^\infty} \leq C$. Dunque *se* $\sigma \in S^{o}_{1,1}(R^n)$, $\sigma(x,D)$ *è* L^2*-continuo se e solo se*

$$(\sigma(x,D))^*(1) \in BMO(R^n).$$

In particolare, se $\sigma(x,D)$ è un operatore paradifferenziale di Bony, per (1.2.3.b), $(\sigma(x,D))^*(1) = 0$, e quindi tali operatori sono L^2--continui.

2.3. Accenniamo ora la dimostrazione del Teorema 2.2.1. Osserviamo dapprima che, se $T(1) = T^*(1) = 0$ la continuità L^2 di T può essere provata utilizzando argomenti classici (decomposizione di Littlewood-Paley e lemma di Cotlar-Stein: si veda [D/J] o [M4], 2.3. Una dimostrazione alternativa è in [M5]). Per provare il teorema, basterà allora procedere nel modo seguente: poniamo $T(1) = \beta$, $T^*(1) = \gamma$ e costruiamo due operatori L e N tali che:

i) $L, N: \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}'(R^n)$ sono operatori di Calderon-Zygmund;

ii) $L(1) = \beta$, $L^*(1) = 0$, $N(1) = 0$, $N^*(1) = \gamma$.

Applicando l'osservazione fatta precedentemente all'operatore T-L-N si conclude la prova del Teorema.

Poniamo $L(u) = \tilde{\Pi}(u,\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k(\beta)S_{k-2}(u)$; una conseguenza di [F/S] (si veda anche [C/M], VI) è che L è L^2-continua, in quanto

$$\|\tilde{\Pi}(u,\beta)\|_{L^2} \leq C \|\beta\|_{BMO}\|u\|_{L^2}.$$

Osserviamo ora che $\|\Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C\|\beta\|_{BMO}$ $\forall k$. Infatti

$$|\beta_k(x)| = \left|\int dy\,[2^{n(k+1)}\check{\phi}(2^{k+1}(x-y))-2^{kn}\check{\phi}(2^k(x-y))]\beta(y)\right| \leq$$

$$\leq C_n \|2^{n(k+1)}\check{\phi}(2^{k+1}(x-y))-2^{kn}\check{\phi}(2^k(x-y))\|_{H^1(y)} \|\beta\|_{BMO} \leq C_{n,\phi}\|\beta\|_{BMO}.$$

Infatti, denotando con R_j la j-ma trasformata di Riesz, risulta

$$\|R_j(2^{n(k+1)}\check{\phi}\ \ldots)\|_{L^1} = \|R_j(2^n\check{\phi}(2x)-\phi(x))\|_{L^1} = C_{n,\phi},$$

in quanto $x \to 2^n\,\phi(2x) - g(x)$ appartiene a $\mathcal{S}$ e ha integrale nullo e quindi appartiene ad H^1. Analogamente anche la norma L^1 di $2^{n(k+1)}\check{\phi}\ldots$ è indipendente da k e da x.

Osserviamo anche che per la disuguaglianza di Bernstein risulta

$$\|D^\alpha\,\Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C_n^{2^{k|\alpha|}}\|\Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C'_{n,\phi}\,2^{k|\alpha|}\,\|\beta\|_{BMO}.$$

E' immediato allora verificare che per $x \neq y$ il nucleo distribuzioni di L è dato da

$$L(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k(\beta)(x)\,2^{(k-2)n}\,\check{\phi}(2^{(k-2)}(x-y))$$

(la serie converge assolutamente per $x \neq y$).

E' possibile inoltre provare che (2.a), (2.b), (2.c) sono soddisfatte ($\varepsilon = 1$). Risulta evidentemente $L(1) = \beta$. Poiché poi $\mathrm{supp}\{\phi\,(\frac{\xi}{2^{k+1}}) - \phi(\frac{\xi}{2^k})\} \cap \mathrm{supp}\,\phi(\frac{\xi}{2^{k-2}}) = \emptyset$, risulta $\int dx\,\Delta_k(\beta)(x)S_k(\psi)(x)=0$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$, e quindi $L^*(1) = 0$. La costruzione di L è così comple

ta. La costruzione di N è analoga.

Osserviamo per concludere che il Teorema 2.2.1 ha un analogo negli spazi di natura omogenea.

BIBLIOGRAFIA

[B1] J.M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Amm. Scient. Ec. Norm. Sup.,(4) 14 (1981), 209-246.

[B2] ________ Interaction des singularités pour les equations de Klein-Gordon non linéaires, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84, Exposé n. 10.

[B/R 1] M. BEALS e M. REED, Propagation of singularities for hyperbolic pseudodifferential operators with nonsmooth coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 169-184.

[B/R 2] ________________ Microlocal regularity theorems for nonsmooth pseudodifferential operators and applications to non linear problems, Trans. Amer. Math. Soc., 285 (1984), 159-184.

[C] A.P. CALDERON, Commutators, Singular Integrals on Lipschitz Curves and Applications, Proc. of the I.C.M. Helsinki (1978).

[C/M] R.R. COIFMAN e Y. MEYER, Au delà des opérateurs pseudo-differentiels, Astérisque 57 (1978).

[C/McI/M] R.R. COIFMAN, A. Mc INTOSH, Y. MEYER, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, Ann. of Math., 116 (1982), 361-388.

[C/D/M] R.R. COIFMAN, G. DAVID e Y. MEYER, La solution des conjectures de Calderon, Advances in Math., 48 (1983), 144-148.

[D/J] G. DAVID e J.L. JOURNE, Une caractérisation des opérateurs integraux singuliers bornés sur $L^2(R^n)$, C.R. Acad Sc. Paris, 296 (1983), Séz. I, 761-764.

[F/S] C. FEFFERMAN e E.M. STEIN, H^p Spaces of Several Variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.

[J] J.L. JOURNE, Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Caldéron, Lecture Notes in Mathematics, 994, Springer 1983.

[M/R] R. MELROSE e N. RITTER, Interaction of nonlinear progressing waves for semilinear wave equations, Ann. of Math., 120 (1984).

[M1] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J.M. Bony, Suppl. Rend. Circolo mat. Palermo (2) 1 (1981), 1-20.

________ Nouvelles estimations pour les solutions d'equations aux dérivées partielles non linéaires, Sem. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1981/82, Exposé n. 6.

[M3] ________ Thèorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G.C. Verchota, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1982-83, Exposé n.

[M4] ________ Lemme de Cotlar, Opérateurs définis par des intégrales singulières et applications aux equations aux dérivêes partielles, Monografias de Matematicas III, Universidad autonoma de Madrid, 1983.

[M5] ________ Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières, Sem. Goulaouic-Meyer-Scwhartz 1983/84, Exposé n. 1.

[ME] G. METIVIER, Intégrales Singulières, Université de Rennes D.E.A. 1981/82.

[ST] M. SABLE-TOUGERON, Règularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires, 1984.